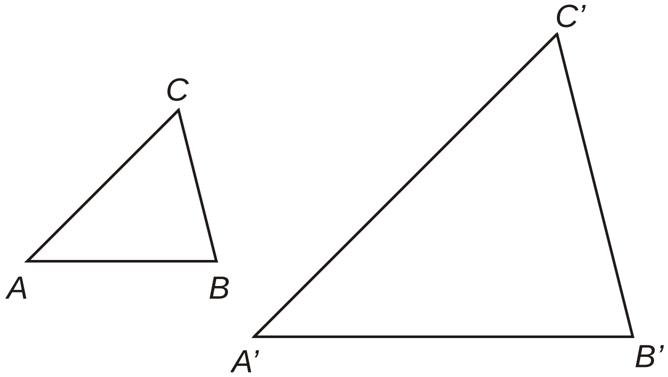
3.4.11 Stejnolehlost I

Předpoklady: 030411

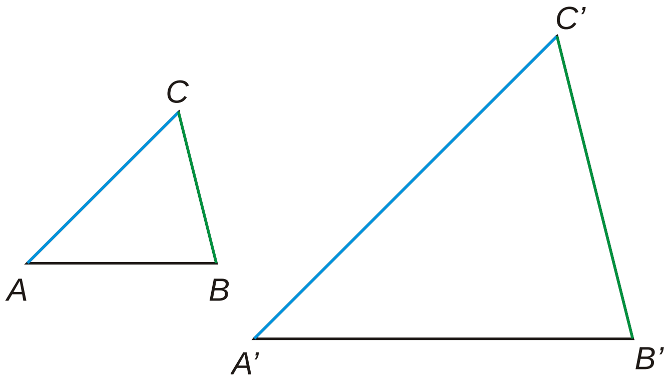
Shodné zobrazení: obrazem úsečky je úsečka s ní shodná
Podobné zobrazení: obrazem úsečky je úsečka jiné velikosti. Poměr velikosti obrazu a vzoru je u všech zobrazovaných úseček stejný.

Pedagogická poznámka: Pokud máte hodně času a třídu dobrou v přemýšlení, můžete zkusit hodinu tak, jak je napsána. Pokud jsou podmínky normální (a tedy méně příznivé) doporučuji tuto hodinu přeskočit a začít další hodinou.

Př. 1: Narýsuj libovolný obecný trojúhelník ABC a jeho obraz v libovolném podobném zobrazení tak, aby odpovídající si strany trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ byly rovnoběžné. Příklad narýsuj tak, aby oba trojúhelníky ležely vedle sebe a vedle menšího z nich bylo prázdné místo. Například tak, jak je nakresleno na obrázku. Čím je menší rozdíl ve velikosti trojúhelníků, tím větší musí být volné místo. Najdi takový způsob konstrukce, který nevyžaduje kružítko.

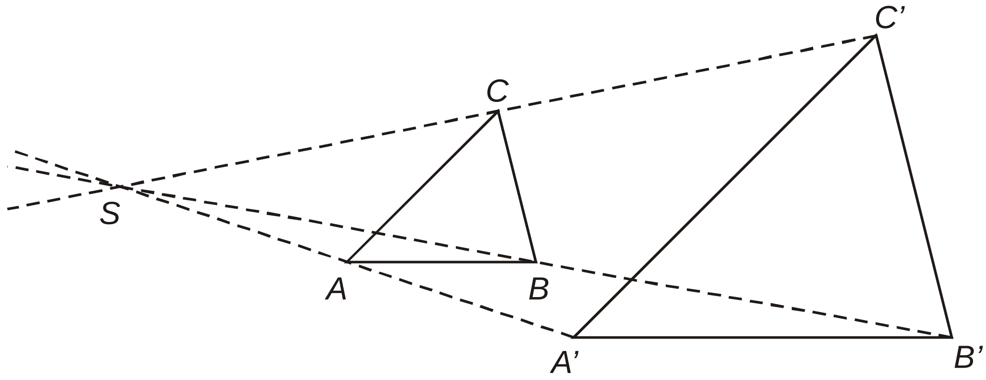


Jeden z trojúhelníků nakreslíme libovolně. Z druhého trojúhelníků nakreslíme jednu ze stran a zbývající doděláme jako rovnoběžky.



Pedagogická poznámka: Opět je dobré studenty kontrolovat, zda kreslí obecné trojúhelníky. Mají tendenci ke kreslení rovnoramenných nebo rovnostranných, ze kterých se samozřejmě špatně poznává, které strany k sobě patří.

Př. 2: U trojúhelníků narýsovaných v minulém příkladu spoj odpovídající si body přímkami.



Zobrazení připomíná funkci projektoru. Paprsky vycházejí z jednoho místa a velikost obrazu je dána tím, jak daleko od středu umístíme plátno.

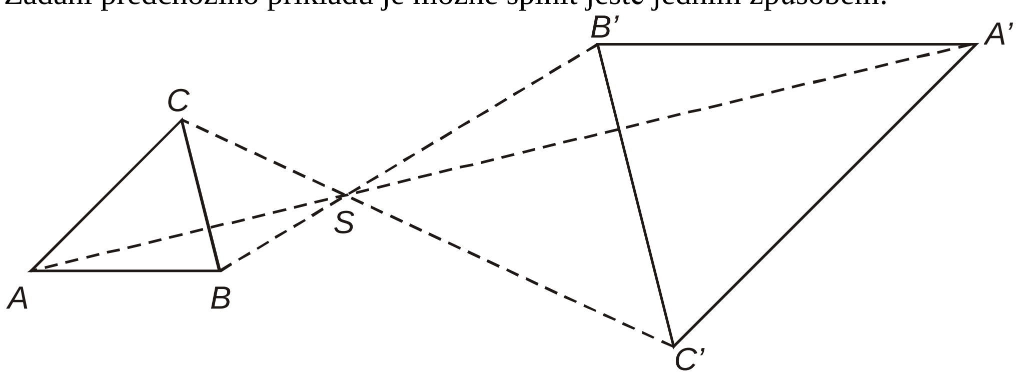
Př. 3: Všechny tři přímky narýsované v předchozím příkladu se protínají v jediném bodě. V obrázku naměř délky stran obou trojúhelníků a délky úseček mezi vrcholy trojúhelníků a bodem *S*. Spočti poměry velikostí odpovídajících si úseček.

$\frac{|A'S|}{|AS|} = \frac{6,3\,\text{cm}}{3,2\,\text{cm}} \doteq 1,97 \doteq 2$ $\quad \frac{|B'S|}{|BS|} = \frac{11,2\,\text{cm}}{5,6\,\text{cm}} = 2$ $\quad \frac{|C'S|}{|CS|} = \frac{10,2\,\text{cm}}{5,1\,\text{cm}} = 2$

$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{5\,\text{cm}}{2,5\,\text{cm}} = 2$ $\quad \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{5,7\,\text{cm}}{2,9\,\text{cm}} \doteq 1,97 \doteq 2$ $\quad \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{4,1\,\text{cm}}{2,1\,\text{cm}} \doteq 1,95 \doteq 2$

$\Rightarrow$ všechny poměry se přibližně rovnají stejnému číslu.

Zadání předchozího příkladu je možné splnit ještě jedním způsobem:



Opět platí:

$\frac{|A'S|}{|AS|} = \frac{8,5\,\text{cm}}{4,3\,\text{cm}} \doteq 1,98 \doteq 2$ $\quad \frac{|B'S|}{|BS|} = \frac{3,9\,\text{cm}}{1,9\,\text{cm}} \doteq 2,05 \doteq 2$ $\quad \frac{|C'S|}{|CS|} = \frac{4,7\,\text{cm}}{2,4\,\text{cm}} \doteq 1,96 \doteq 2$

$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{5\,\text{cm}}{2,5\,\text{cm}} = 2$ $\quad \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{5,7\,\text{cm}}{2,9\,\text{cm}} \doteq 1,97 \doteq 2$ $\quad \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{4,1\,\text{cm}}{2,1\,\text{cm}} \doteq 1,95 \doteq 2$

$\Rightarrow$ všechny poměry se přibližně rovnají stejnému číslu.

Př. 4: Zobrazení, ve kterém je zobrazen trojúhelník *ABC* na trojúhelník $A'B'C'$ se nazývá **stejnolehlost (homotetie)**. Čím je stejnolehlost určena? Jaký je rozdíl mezi oběma výše narýsovanými stejnolehlostmi? Navrhni, jak tento rozdíl zachytit pomocí parametrů určujících stejnolehlost.

Obě stejnolehlosti jsou určeny:

- polohou středu (místa, kde se protínaly přímky AA', BB' CC')
- poměrem $\frac{velikost\,obrazu}{velikost\,vzoru}$

Obě narýsované stejnolehlosti se lišily tím, zda jsou obraz i vzor na stejné straně vzhledem ke středu. Přesněji: zda polopřímky SA a SA' splývají nebo jsou navzájem opačné.
Rozdíl bychom mohli zachytit pomocí poměru:

- kladný poměr – polopřímky SA a SA' splývají (body jsou na stejné straně)
- záporný poměr – polopřímky SA a SA' jsou navzájem opačné (body jsou na opačných stranách)

Př. 5: Vyber si libovolnou z dosud vyslovených definic shodností a sestav podle tohoto vzoru definici stejnolehlosti. Poměr $\frac{velikost\,obrazu}{velikost\,vzoru}$ se nazývá koeficient stejnolehlosti a značí se κ.

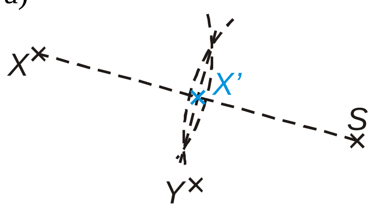
Pro sestavení definice stejnolehlosti si vybereme definici středové souměrnosti. Obě zobrazení jsou určena středem a v obou sestrojujeme polopřímku *SA*.
Jsou dány dva různé body *X*, *S*. Středová souměrnost je shodné zobrazení $S(S)$, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod *S* je středem úsečky XX'.
2. bodu *S* bod $S' = S$.

Definice stejnolehlosti:
Je dán bod *S* a reálné číslo κ, ($\kappa \neq 0$). Stejnolehlost (homeotetie) se středem *S* a koeficientem κ je zobrazení $H(S,\kappa)$, které přiřazuje:
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$; přitom pro $\kappa > 0$ leží bod na polopřímce *SX*, pro $\kappa < 0$ leží na polopřímce k ní opačné
2. bodu *S* bod $S' = S$.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu nejdříve společně zkontrolujeme výběr vzorové definice (středová souměrnost) a poté studenti samostatně zkouší definici předělat. Často zapomínají na podmínku $\kappa \neq 0$ a mají problémy s používáním polopřímek. Kontrolu samozřejmě děláme společně.

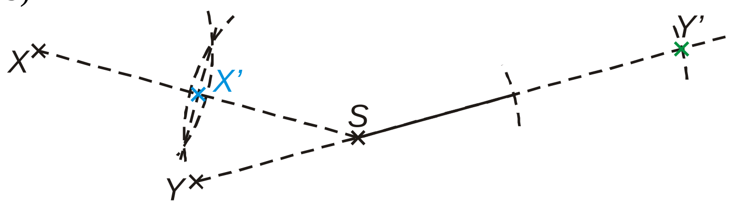
Př. 6: Jsou dány body *S*, *X*, *Y*. Sestroj body:
a) $X'; H(S;0,5): X \to X'$, b) $Y'; H(S;-2): Y \to Y'$.

a)



1. $X; Y; S$
2. XS
3. $X'; X' \in XS; |XS| = 2|X'S|$

b)



1. YS
2. $Y';Y' \in YS;Y' \notin \mapsto SY;|Y'S| = 2|YS|$

Shrnutí: